

Câu 1 (1,5 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

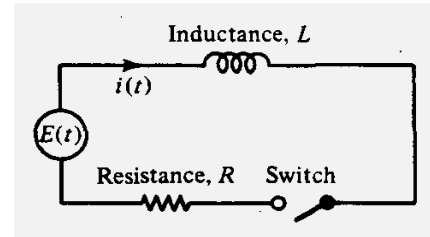
Câu 2 (3,5 điểm)

a) Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = E_0 \cos 5t, \quad i(0) = 0$$

với E_0, R, L là các hằng số dương.

Giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$.



b) Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' - 7y = e^{-2t} \\ x + y' + 8y = 4 \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0) = 0, y(0) = 0$$

Câu 3 (2 điểm) (**Mô hình dao động**) Giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 12y = 12 + e^{-2t} + \sin 5t \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t . Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Câu 4 (1,5 điểm) **Mô hình vay và trả dần hàng tháng (liên tục)**

Bạn vay ngân hàng số tiền ban đầu D với lãi suất r **mỗi tháng** (ví dụ như lãi suất 1% /tháng thì $r = 0.01$), nhập lãi liên tục vào vốn. **Mỗi tháng**, bạn trả (liên tục) cho ngân hàng số tiền m . Gọi $y(t)$ là số tiền mà bạn nợ ngân hàng sau t **tháng** tính từ lúc bạn vay ngân hàng. Tốc độ tăng nợ với lãi suất r **mỗi tháng** là: $ry(t)$

(Tốc độ biến thiên tiền nợ) = (Tốc độ tăng nợ do tiền lãi) – (Tốc độ trả nợ)

$$\frac{dy}{dt} = ry(t) - m$$

Phương trình được viết lại dạng tuyến tính: $\frac{dy}{dt} - ry(t) = -m$, với điều kiện $y(0) = D$

Hãy giải phương trình xác định $y(t)$ và lập phương trình xác định thời gian bạn trả hết nợ. Xác định m biết $r = 0.01$, $D = 2$ tỷ đồng và $t = 240$ tháng (20 năm) là thời gian bạn trả hết nợ (lấy 2 chữ số sau dấu chấm thập phân).

Chọn một trong hai câu (câu 5 hoặc câu 6)

Câu 5 (1,5 điểm) (**Mô hình logistic có thu hoạch-Logistic growth with harvesting**)

Bạn tham gia vào một dự án chăm sóc, bảo tồn, khai thác/thu hoạch phát triển bền vững một nguồn tài nguyên của đất nước. Giả sử lượng tài nguyên (tạm sử dụng đơn vị là: đơn vị tài nguyên) ở thời điểm t (đơn vị tính là năm) tính từ năm 2023 (tức là năm 2023 ứng với $t = 0$), được xấp xỉ bởi hàm $y(t)$, thỏa phương trình vi phân logistic có thu hoạch

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{lượng tài nguyên hiện tại là } y_0 \text{ đơn vị})$$

Khi $r = 0.5e^{-0.1t}$, $K = 100$, $y(0) = y_0 = 45$, $h = 0.1e^{-0.1t} y$ thì phương trình trở thành

$$\frac{dy}{dt} = 0.4e^{-0.1t} y - e^{-0.1t} \frac{y^2}{200}, \quad y(0) = 45$$

Lần lượt áp dụng phương pháp Euler (RK1) và phương pháp Euler cải tiến (RK2) với bước nhảy $h = 1$ đồng thời sử dụng máy tính (Casio), ước tính lượng tài nguyên các năm tiếp theo từ 2024 đến 2028. Cụ thể, trình bày vào bài thi bằng cách kẻ lại các bảng sau đây và điền đầy đủ những chỗ còn trống.

Công thức Euler (RK1) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n =$ giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK1)
Công thức Euler cải tiến (RK2) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n =$ giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK2)

Tiếp theo bấm CALC (chạy thuật toán) rồi điền kết quả đầy đủ vào bảng sau, lấy 2 chữ số sau dấu chấm “.” thập phân:

Năm	t_n	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler (Euler’s Method) (đơn vị tài nguyên)	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler cải tiến (Improved Euler’s Method) (đơn vị tài nguyên)
2023	0	45	45
2024	1		
2025	:		
2026			
2027			
2028			

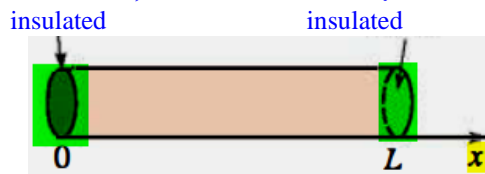
Câu 6 (1,5 điểm) Bài toán truyền nhiệt một chiều thuần nhất, hai đầu cách nhiệt.

PT: $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$

BC: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, t > 0$

IC: $u(x,0) = f(x), 0 < x < L$

Giải bài toán tìm $u(x,t)$ biết $f(x) = 200 + x$



(Hai đầu cách nhiệt, nhiệt độ ban đầu tại x là $f(x)$)

❖ **Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Câu 1: Nắm vững phép toán ma trận, tính được định thức và ứng dụng, biết và thực hiện các cách giải hệ phương trình tuyến tính.	G1: 1.1, 1.2 ; G2:2.1,2.3 G2:2.1.3, 2.1.4 , 2.4.2,2.6;2.7
Câu 3, 4, 5: Nhận dạng được các bài toán trong thực tế được mô hình bởi phương trình hoặc hệ phương trình vi phân. Giải được phương trình, hệ phương trình vi phân và hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1,2.3 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6
Câu 5, 6: Giải gần đúng phương trình vi phân bằng phương pháp số và ứng dụng vào thực tế. Giải bài toán truyền nhiệt một chiều.	G1: 1.1; G2:2,2.1,2.3 G2:2.1, 2.1.2, 2.4.2

Ngày 12 tháng 6 năm 2023
Thông qua Bộ môn Toán